

Gli **Assiomi di Peano** sono un gruppo di [assiomi](#) ideati dal matematico [Giuseppe Peano](#) al fine di definire assiomaticamente l'insieme dei [numeri naturali](#).

Un modo informale di descrivere gli assiomi può essere il seguente:

1. Esiste un numero naturale, 0 (o 1)
2. Ogni numero naturale ha un numero naturale successore
3. Numeri diversi hanno successori diversi
4. 0 (o 1) non è il successore di alcun numero naturale
5. Ogni insieme di numeri naturali che contenga lo zero (o l'uno) e il successore di ogni proprio elemento coincide con l'intero insieme dei numeri naturali (assioma dell'induzione)

Si prende 0 o 1 a seconda del modello dei numeri naturali voluto. Oltre a questi assiomi, Peano sottintende anche gli [assiomi logici](#) che gli permettono di operare con la [logica](#) simbolica.

🔗 **Significato matematico degli assiomi** [\[modifica\]](#)

In termini più precisi possiamo dire che la struttura data dalla terna $(\mathbb{N}, 0, S)$ composta dall'[insieme](#) dei [numeri naturali](#) \mathbb{N} , lo [zero](#) e la [funzione](#) "successore" $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ può essere caratterizzata *a meno di isomorfismi* (in seguito sarà più chiaro in che senso) dai seguenti *assiomi di Peano*:

- (P1) Esiste un numero $0 \in \mathbb{N}$
- (P2) Esiste una [funzione](#) $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (chiamata "successore")
- (P3) $x \neq y$ implica $S(x) \neq S(y)$
- (P4) $S(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{N}$
- (P5) se U è un sottoinsieme di \mathbb{N} tale che:

1. $0 \in U$
2. $x \in U$ implica $S(x) \in U$

allora $U = \mathbb{N}$

Analizziamo la funzione di ciascun assioma:

- (P1) ci dice che l'insieme \mathbb{N} non è [vuoto](#) specificandone un elemento (0);
- (P2) afferma l'esistenza di una funzione S (la *funzione successore*) di cui l'insieme \mathbb{N} è [dominio](#) e [codominio](#).
- (P3) dice che S è una [funzione iniettiva](#); questo ci permette di escludere modelli in cui partendo da 0 e andando avanti ripetutamente da un elemento al successore si possa ritornare su un elemento già visitato e rimanere confinati in un ciclo;
- (P4) dice che 0 non è nell'[immagine](#) di S , questo ci permette di escludere modelli in cui iterando la funzione successore si possa compiere un loop che ritorni al punto di partenza; questo assioma con il precedente esclude qualsiasi modello dotato di un numero finito di elementi.
- (P5), l'ultimo assioma di Peano, è anche noto con il nome di [Principio di induzione](#) ed è uno strumento molto usato nelle [dimostrazioni](#): quello che ci dice è che l'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali è il più piccolo insieme che contenga lo 0 e che contenga il successore di ogni suo

elemento (cioè che sia *chiuso* rispetto alla funzione *successore*). Questo assioma ci permette di escludere modelli in cui siano presenti degli elementi "intrusi" al di fuori della sequenza infinita dei successori dello zero.

Cacciaguida ([Firenze](#), 1091 ca. – [Palestrina](#), 1148 ca.) è stato un [militare italiano](#), trisavolo di [Dante Alighieri](#).

Non sappiamo molto su di lui; le uniche fonti dirette che ne attestano l'esistenza sono due documenti del 1189 e del 1201, le altre notizie ci sono state tramandate dal suo illustre discendente in forma indiretta nella descrizione del loro incontro nel [Paradiso](#). Si sa che fu nominato Cavaliere da [Corrado III di Svevia](#) e che lo seguì nella [Seconda Crociata](#) (1147-1149), trovandovi la morte.



Cacciaguida, illustrazione di [Gustave Doré](#)

Dante immagina di incontrare l'avo durante il suo viaggio nel Paradiso, traversando il cielo di [Marte](#) che ospita le anime dei combattenti per la fede e la cronaca dell'incontro occupa ben tre canti (dal XV al XVII) della terza parte della "[Divina Commedia](#)". Al di là del valore letterario ed artistico, i tre canti sono anche importanti dal punto di vista storico perché ci forniscono numerose informazioni sulla famiglia [Alighieri](#) e sulla [Firenze](#) del [XII secolo](#).

Nel canto XV, Cacciaguida racconta a Dante come era la Firenze dei suoi tempi, ancora compresa nella prima cinta di mura, risalenti all'epoca di [Carlo Magno](#): ai tempi di Dante era stata costruita una seconda cerchia, risalente al 1173, che sarà poi a sua volta sostituita da una terza nel 1284. La piccola Firenze di quei tempi viene descritta come una cittadina sobria e pacifica, così diversa da quella dell'età del Sommo Poeta: allora, ci dice Cacciaguida, le donne non andavano a spasso con vestiti costosi ed ingioiellate; la nascita di una figlia non era vista con paura per la futura ricca dote; le case erano modeste e il panorama di Firenze non era ancora fastoso; non erano presenti i vizi sessuali; i nobili andavano vestiti modestamente e non si vergognavano di esercitare professioni umili; le famiglie non correvano il pericolo dell'esilio o dei trasferimenti per motivi commerciali e che allora avrebbero fatto "notizia" i personaggi dissoluti, non quelli onesti come ai tempi del nipote. Alla fine del canto, veniamo a sapere che Cacciaguida ebbe due fratelli, *Moronto* ed *Eliseo* (di cui non sappiamo nulla), che sposò una donna dell'Alta Italia (una [Aldighieri](#) di [Ferrara](#), preciserà in seguito [Giovanni Boccaccio](#)), che da lei ebbe origine il cognome Alighieri e le successive vicende della sua vita fino alla morte.

Nel canto XVI, Cacciaguida risponde ad alcune domande che Dante gli pone sulla Firenze passata: dalle risposte veniamo così a sapere che allora la città aveva un quinto degli abitanti di quella del 1300; che non aveva ancora visto l'immigrazione di famiglie del contado, spesso portatrici di delinquenza e che il confine della città era allora a [Galluzzo](#) ed a [Trespiano](#). Cacciaguida dice che questa immigrazione di gente nuova, favorita dalla [Chiesa](#), è causa delle discordie attuali, che porteranno alla rovina della città e conclude elencando alcune celebri famiglie fiorentine potenti allora ma decadute al tempo del nipote. Il canto termina col racconto del celebre scontro tra [Amidei e Buondelmonti](#) del [1215](#), che diede origine alle lotte tra [Guelfi](#) e [Ghibellini](#).

Nel canto XVII, Cacciaguida predice a Dante gli eventi della sua vita futura, ossia l'esilio da Firenze e la sua vita raminga e solitaria, ed inoltre rivela la missione di Dante una volta tornato nel mondo: per bocca di Cacciaguida infatti Dio investe Dante del compito di rivelare la sua volontà all'umanità per salvarla, egli infatti riceve il ruolo di poeta-profeta. Particolare curioso: i versi 58 e 59 recitano "*Tu proverai sì come sa di sale lo pane altrui...*", segno forse che già allora a Firenze si usava consumare pane non salato.

Sistemi di numerazione sono i sistemi utilizzati per esprimere dei [numeri](#) e possibilmente alcune operazioni che si possono effettuare su di essi. I numeri, a cominciare dai cosiddetti [numeri naturali](#), fin dai tempi antichi si sono rivelati strumenti necessari per affrontare problemi di importanza fondamentale (contare, misurare, commerciare, amministrare, formulare e far rispettare leggi, sviluppare conoscenze scientifiche e tecniche, ...). quindi presso tutte le culture delle quali si conosce qualche forma di organizzazione sono state sviluppate notazioni numerali. La storia di questi sviluppi è piuttosto complessa e travagliata e purtroppo di molti fatti e di molte motivazioni si è persa traccia. Su di essa si possono però fornire indicazioni che per molti possono presentare grande interesse, soprattutto in quanto collegate a temi culturali e conoscitivi di grande rilevanza.

Indice	
[nascondi]	
• 1 Tipologie	
○ 1.1 Il sistema decimale-posizionale	
○ 1.2 Notazioni numeriche alfabetiche	
• 2 Evoluzione dei sistemi numerici	
○ 2.1 I numeri concreti	
○ 2.2 Corpo umano e prime basi numeriche	
○ 2.3 La mano come strumento di conta e le sue basi numeriche	
▪ 2.3.1 I piedi e la base 20	
▪ 2.3.2 Le falangi e la base 12	
▪ 2.3.3 Il mistero della base 60	
▪ 2.3.4 Il trionfo della base 10	
• 3 Voci correlate	
• 4 Bibliografia	



□
 Gli Algoristi contro gli Abacisti, di Gregor Reisch; Margarita Philosophica, [1508](#).

A grandi linee si può dire che nel passato sono state adottate svariate notazioni numerali in gran parte poco razionali fino a giungere con una certa fatica alle notazioni oggi più diffuse, pratiche e canoniche, le notazioni posizionali [decimali](#). Con lo sviluppo del [computer](#) si sono posti altri problemi che oggi sono padroneggiati in modo abbastanza soddisfacente. Dalla metà del [XX secolo](#) si sono quindi precisati sistemi di numerazione adatti non solo agli esseri umani, ma anche alle macchine. Per soddisfare certe esigenze accanto al sistema canonico vengono considerati alcuni sistemi esotici che presentano alcuni pregi pratici e un certo interesse matematico.

🔍
 Per approfondire, vedi la voce [Storia dei numeri](#).

I sistemi di numerazione si riferiscono quindi alla successione dei cosiddetti [numeri naturali](#). Per ovvi motivi, i più antichi sistemi di numerazione hanno *base dieci*, con riferimento all'atto di contare con le dita delle mani.

Possono essere di tipi differenti: per esempio, gli [antichi Romani](#) usavano un sistema basato essenzialmente sul numero [cinque](#) (vedi [numeri romani](#)), additivo e *non posizionale*: il simbolo *X* rappresenta sempre il numero dieci, *V* il numero cinque, e così via; invece, il comune sistema [decimale](#) che tutti impariamo a scuola, è di tipo *posizionale*: ogni cifra assume un significato diverso a seconda della posizione in cui si trova (unità, decine, centinaia, ecc.); i sistemi di tipo *posizionale* ci sono stati tramandati dagli [Arabi](#).

Per una definizione più formale di sistema di numerazione posizionale:

- si sceglie un qualsiasi numero naturale b (diverso da zero e da uno), che chiameremo *base*
- si scelgono b simboli diversi, che chiameremo *cifre*
- si compongono i numeri tenendo presente che il valore di ogni cifra va moltiplicato per:
 - b^0 cioè 1 (unità) se è l'ultima cifra alla destra del numero che stiamo considerando
 - b^1 cioè b se è la seconda cifra da destra,
 - b^2 se è la terza cifra da destra,
 - e così via, $b^{(n-1)}$ se è la n -esima cifra da destra
- la somma tutti i valori così ottenuti è il numero che stiamo considerando

$$2003_{base10} = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$
$$1100_{base2} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 8 + 4 = 12_{base10}$$

Il sistema decimale-posizionale [\[modifica\]](#)

Le ragioni della superiorità del sistema numerico decimale-posizionale, che si è diffuso dall'[India](#), sono il principio posizionale (che di per sé denota i diversi ordini numerici) e l'uso di dieci simboli, comprensivi dello [zero](#) (che colmava i vuoti in un sistema posizionale). Un sistema posizionale è un naturale e sistematico sviluppo del sistema moltiplicativo in cui viene usata una base fissa, spariscono come superflui determinativi e moltiplicatori e dove il coefficiente è rappresentato dalla posizione della cifra nell'intera rappresentazione numerica. Le altre notazioni dovevano dare ad ogni cifra un valore fisso a prescindere dalle posizioni. Nella numerazione cinese i segni per 7829 sono 7 mentre col sistema da noi utilizzato sono 4. Nel nostro sistema sono soppressi gli indicatori delle potenze di 10 e le cifre delle unità prendono diverso valore a seconda delle posizioni (misto ideale tra il numero di cifre e la necessità di iterazione delle stesse). In questo modo il linguaggio scritto comunica una fitta rete di concetti mediante semplice permutazione di pochi simboli.

Il sistema decimale-posizionale consente anche una comoda esecuzione di operazioni [aritmetiche](#): si mettono i numeri da sommare uno sotto l'altro e li si può aggiungere colonna per colonna riportando i totali eccedenti il 10 nella colonna a fianco (ordine superiore). Se si usano invece i numeri romani non c'è una notazione che abbia efficacia algoritmica (non è possibile cioè fare operazioni se non ricorrendo ad un supporto esterno, tipo l'[abaco](#)).

Questo sistema è anche una sorta di metafora ontologica e sociale di una gerarchia funzionale (e non rigida e letterale come quella [egizia](#) con i diversi ordini numerici irriducibili gli uni agli altri) di

livelli ontologici che funzionano come vasi comunicanti ed in cui c'è il passaggio dalla quantità alla qualità ed in cui c'è il *novum*.

[Babilonesi](#), [Cinesi](#) e [Maya](#) con il principio di posizione già furono capaci di rappresentare qualsiasi numero con una quantità ridotta di cifre di base, ma ebbero dei limiti:

- I babilonesi non associarono cifre diverse alle 59 unità significative del primo ordine, ma iteravano i due simboli disponibili. Essi purtroppo non concepirono lo zero né come numero (quantità nulla) né come operatore aritmetico.
- I Cinesi mantennero la notazione ideografica e reintrodussero elementi di notazione moltiplicativa. Inoltre il loro uso dello zero fu sporadico e poco significativo.
- I Maya con l'anomalia del moltiplicatore del terzo ordine numerico persero la possibilità di utilizzare lo zero come operatore.

Perché il nuovo sistema posizionale manifestasse tutte le sue positive potenzialità bisognava aspettare la grande esperienza indiana.

LA MATEMATICA NELLA DIVINA COMMEDIA BRUNO D'AMORE

Sebbene moltissimi siano oramai gli studi di vari Autori dedicati all'analisi della presenza della matematica nell'opera di Dante e nella "Divina Commedia" in particolare, con grande stupore ci si accorge che esiste sempre qualche angolo inesplorato o qualche verso che può ancora fornire argomento di riflessione e di studio; lo stupore cessa ogni volta, quando si riflette sulla grandezza dell'Opera ...

A costo di ripetere cose già dette, nella speranza di cogliere sfumature diverse o angolazioni sfuggite, dividerò questo breve saggio (ché ben altro si potrebbe aggiungere) in tre paragrafi, specializzando i riferimenti in base ad un criterio matematico: aritmetica e probabilità nel primo, logica formale nel secondo, geometria nel terzo. Porrò le note ed i riferimenti bibliografici al termine di ciascun paragrafo, proprio per specializzare ancor più la trattazione.

1. Aritmetica e Probabilità.

Dopo il 1290 (dunque all'età di 25 anni) e per circa 30 mesi, Dante studia filosofia ed in particolare Boezio (come apprendiamo dal "Convivio"). Ma Anicio Manlio Torquato Severino Boezio (480-524) (l'autore del "De consolatione philosophiae") non è solo il traduttore delle opere di Nicomaco e di Euclide, bensì egli stesso valente matematico, autore di pregevoli trattati di Geometria e di Aritmetica; scrive, per esempio, un "De Institutione Aritmetica" (Dante lo incontra in Par. X 125-

129).

Quale e quanta aritmetica conosceva Dante? È ben noto che la “Divina Commedia” è ricchissima di riferimenti numerologici; ora, però, di fatto, per i calcoli necessari alla numerologia non occorre poi una grande competenza aritmetica. Non è quindi al Dante numerologo che occorre guardare per avere la risposta alla nostra domanda, ma puntare di più l’attenzione sulla presenza di una vera e propria conoscenza aritmetica. A questo proposito, molti Autori si sono già posti autorevolmente il problema come, per esempio Beniamino Andriani in [A]. [1] Aggiungerò dunque considerazioni con poca speranza di novità.

Sappiamo che Dante fu scolaro al convento francescano di Santa Croce a Firenze e poi, pare, al convento domenicano di Santa Maria Novella, dapprima Studium Solenne, poi, dal 1295, Studium Generale. Essere scolari a Firenze non è come esserlo in altre città: a Firenze, ed in tutta la Toscana, era possibile avere Maestri d’Abaco di alto prestigio.

Sappiamo, per esempio, che Jacopo, figlio di Dante, è addirittura allievo di Paolo dell’Abaco (morto tra il 1364 ed il 1372) che insegna in una delle poche scuole d’abaco fisse (di fronte alla chiesa di Santa Trinità). Forse Dante viene a contatto con il Libro d’Abaco cui Paolo deve il suo nome?

Secondo la testimonianza di G. Arrighi, pare che tale trattato di Paolo risalga agli anni intorno al 1339, ma non è escluso che ne esistessero versioni preliminari, per esempio sotto forma di appunti di scolari. Forse Dante, nella sua sete di sapere, viene a contatto con il “Liber Abaci” di Leonardo figlio di Bonaccio, il Pisano? [2]

Certo, Dante sembra essere molto attento alla cultura, anche scientifica, del suo tempo: ancora bambino; frequenta a Siena alcune lezioni di Pietro Hispano (1220-1277) e qui certo apprende l’efficacia del metodo euristico nelle scienze (ancora piuttosto ingenuo). [3]

Anche in alcuni suoi passi tuttora di interpretazione dibattuta, sarebbe molto interessante avere le risposte alle precedenti domande; infatti, non ostante un articolo dello Statuto dell’Arte del Cambio di Firenze che nel 1299 vietava l’uso dei numeri Arabi ([A], pago 118), piuttosto diffuso nei Trattati d’Abaco è l’uso del sistema arabo-indiano (le “figure delli Indi”) nella scrittura aritmetica e di conseguenza la manipolazione di sempre più rapidi algoritmi di calcolo. Ciò significa, per esteso:

- uso di un sistema posizionale
- a base dieci
- uso dello zero

Tutte queste sono assolute novità, rispetto alla numerazione latina nella quale non c’è sistema posizionale, non c’è zero (non ce n’è bisogno), mentre in effetti in essa il numero dieci gioca un ruolo dominante anche se non come “base” così come si diffonderà poi grazie all’opera di Leonardo Fibonacci ed altri. [4]

Un celebre ed apparentemente banale passo con riferimento all’aritmetica si trova in Par. XV 55-57:

.....
*Tu credi che a me tuo pensier mei
da quel ch’è primo, così come raia
da l’un, se si conosce, il cinque e’l sei;*
.....

Sono le celebri frasi che Cacciaguida rivolge a Dante: “*Tu hai ferma convinzione che il tuo pensiero*

discenda, si riveli direttamente a me da Dio, primo Ente e principio di ogni cosa, così come dalla conoscenza dell’unità deriva quella di tutti gli altri numeri” [S]. In tempi moderni si direbbe che, ammessa l’unità, si possono costruire i numeri naturali $n, n + 1$, intendendo con ciò tutti i numeri [Cim]. In effetti, la notazione “ n ”, tipica oggi del matematico, intesa ad indicare un numero qualsiasi, è assai più recente; quel “il cinque e’l sei”, come nota Sapegno, sta ad indicare numeri generici successivi. D’altra parte anche Euclide, quando vuol considerare un numero generico di numeri primi, ne prende tre (mi riferisco al celebre teorema: Dato un numero primo qualsiasi, se ne può sempre trovare un altro maggiore, che si trova negli “Elementi”).

Detto ciò, mi pare che l’affermazione di Dante non sia di grande rilevanza aritmetica; credo che

qualsiasi persona anche di modesta cultura possa ben comprendere che, avendo a disposizione l'unità, sia ragionevolmente facile costruire o raggiungere qualsiasi altro numero per addizione ripetuta di essa. Dico ciò espressamente perché si è voluto invece vedere in questa frase addirittura qualche anticipazione dell'intuizione di Giuseppe Peano (1858-1932) che, com'è ben noto, ideò un sistema assiomatico dei numeri naturali; pur con tutto l'amore che possiamo nutrire per Dante, questa interpretazione (si veda, per es., [Cim]), mi sembra eccessiva.

Molto più interessante trovo un altro riferimento aritmetico, quello che si trova in Par. XXVIII 91-93:

... ..

*L'incendio suo seguiva ogni scintilla;
ed eran tante, che 'l numero loro
più che 'l doppiar delli scacchi s'immilla.*

... ..

Il grande numero cui si fa riferimento può essere inteso come quello degli angeli che nascono; questi

non si contano a uno a uno, ma (forzando un po' la mano, si potrebbe dire, interpretando quasi oltre il lecito) a mille a mille. Quanto è grande il numero di questi angeli? Ebbene, Dante afferma che il loro immillarsi supera "il doppiar delli scacchi". È un evidente riferimento (attraverso la mediazione di una linea topica) alla famosa leggenda di Sissa Nassir, l'inventore degli scacchi; egli chiese come ricompensa al suo entusiasta sovrano qualche cosa di apparentemente assai modesto: presa la scacchiera 8 per 8, egli chiese un chicco di riso (altre volte si trova di grano) sulla prima casella; il doppio, cioè 2, sulla seconda; il doppio ancora, cioè 4, sulla terza; il doppio ancora, cioè 8, sulla quarta; e così via, fino all'ultima casella, la sessantaquattresima, appunto. Con calcoli abbastanza agevoli, oggi, specie con l'uso di un calcolatore, ma che risultano essere ardui assai con il sistema romano, si trova che il numero di chicchi dovuti a Sissa Nassir è il seguente: 18 446 744 073 709 551 615, addirittura illeggibile! Con una scrittura più compatta, oggi si preferisce la notazione cosiddetta scientifica: $1,8447 \cdot 10^{39}$.

Per rendersi conto della enormità di questo numero, si può ricorrere al seguente espediente: immaginare di distribuire i chicchi di Sissa Nassir su tutta la superficie terrestre, la cui misura, espressa in base ai dati attuali (e non quelli dei tempi di Dante), compresi mari, oceani, deserti, ghiacciai, montagne, ecc., è di circa $5,0995 \cdot 10^{18} \text{ cm}^2$. Se distribuiamo i chicchi, troviamo 3,62 chicchi (diciamo pure, per arrotondare, 3 chicchi e mezzo) per ogni cm^2 di superficie terrestre! (Il che spiega perché il sovrano si sentì preso in giro e, anziché premiare Sissa Nassir, gli fece mozzare la testa, ottenendo, tra l'altro, un immenso risparmio). Ma il numero degli angeli "più che" raddoppiare, come i chicchi sulla scacchiera, "s'immilla"; se si rifà lo stesso calcolo immillando (nella nostra interpretazione) invece che raddoppiando, si trova un numero immenso, ma pur sempre

finito: 10^{189} (tanto per avere un'idea, $2 \cdot 10^{170}$ angeli per cm^2 di terra ... E c'è da rallegrarsi del fatto che gli angeli siano immateriali!).

Dante sapeva fare questi calcoli? Se sì, con quali strumenti? Non certo con il metodo dei latini!

Anche se non sapeva farli, conosceva qualcuno che li aveva fatti? Era tra le nozioni diffuse dell'epoca? Quel che è certo, è che ai suoi tempi circolavano vari giochi matematici soprattutto sui Libri d'Abaco. La tradizione dei giochi matematici è illustre; basti pensare all'"Ad acuendos juvenes" di Alcuino (735-804), "ministro" di Carlo Magno, che certo traeva ispirazione da testi di Beda il Venerabile (674-735) (che Dante pone in Par. X 131 accanto ad un altro grande enciclopedista, Isidoro di Siviglia (560-636)). Per fare un esempio, il celeberrimo indovinello della capra, del lupo e del cavolo che devono superare un fiume su una barca, appare sia su questo libro di

Alcuino sia in opere di Beda [5]. Mi parrebbe plausibile che tali indovinelli circolassero tra le persone colte a Firenze; e che uno spirito arguto e profondo come Dante non potesse non apprezzarli.

Sebbene io abbia deciso di evitare nelle mie ricerche sulla presenza della matematica in Dante tutto quanto riguarda la numerologia, non posso non ricordare Purg. XXXIII 37-45, ed in particolare:

... ..

nel quale un cinquecento diece e cinque

... ..

numero la cui interpretazione ha fatto discutere curatori, commentatori, lettori e critici. Se si scrive il numero nel sistema allora più diffuso, quello romano, si trova DXV. È un anagramma? Di DUX, cioè forse Arrigo VII? Non è un anagramma? E allora potrebbe essere il monogramma greco di Cristo (Unto del Signore); oppure è Domini Xristi Vergatus, il famoso misterioso Veltro, figura d'altra parte assai ricorrente. Oppure potrebbe essere Domini Xristi Vicarius, cioè: il papa. Gli anagrammi numerici erano molto diffusi nel Medioevo ed è quindi probabile da Dante vi abbia fatto ricorso. Ma la mancanza di un'interpretazione sicura (cioè: autorevole tanto da mettere tutti d'accordo ... per un po'), mi lascia ampi spazi di immaginazione. Si può pensare non a DXV ma a 515, nella forma araba, supponendo che Dante se ne fosse già appropriato. si tratta di un numero che

i numerologi hanno già studiato: sarebbe la distanza tra Terra e Cielo, espressa in anni, facendo riferimento ad Ezechiele I 7. ciò se si accetta come lingua-base dell'interpretazione numerologica l'ebraico [6]. Se invece si accetta il greco, 515 ha come codificazione Parthenos, "Vergine". Se, singolare coincidenza?, si accetta il latino, 515 si codifica in "Mater Christi". La "coincidenza" ha già scatenato ridde di "autorevoli esperti" in dispute ...

Appaiono, sempre nella "Divina Commedia", molti altri passi aritmetici che sto raccogliendo e studiando per un 'opera futura; in questo breve saggio mi limito a queste poche citazioni, non senza ricordare il paragone che Dante fa nel "Convivio" tra l'aritmetica e il Sole: così come il Sole illumina gli altri corpi celesti e di esso non è possibile sostenere la vista, così l'aritmetica illumina e permea tutte le altre discipline scientifiche; sull'infinità dei numeri l'occhio dell'intelletto non può fermarsi "però che 'l numero quant'è in sé considerato, è infinito, e questo non potremo noi intendere".

Com'è annunciato nel titolo di questo paragrafo, passerò ora alla probabilità che, scienza moderna per eccellenza [7], doveva ancora del tutto costituirsi come tale ai tempi di Dante; a proposito di questa disciplina, ho trovato un solo passo, peraltro famosissimo e citatissimo, in Purg. VI 1-3:

*Quando si parte il gioco della zara,
colui che perde si riman dolente,
repetendo le volte, e tristo impara:*

... ..

Anche per quanto concerne questo passo, voglio frenare scorretti entusiasmi; c'è stato chi ha voluto vedere in questi versi un'anticipazione della teoria della probabilità, quella che più tardi G. Cardano (1501-1576), G. Galilei (1564-1642), P. Fermat (1601-1665) ma soprattutto B. Pascal (1623-1662) affronteranno in modo corretto e consapevole. Non basta parlare di un gioco di dadi per farne un'analisi matematica significativa ...

Questo passo è uno dei più celebri ed amati dai cultori ... matematici di Dante, più e più volte citato; vi si cela l'analisi probabilistica ingenua ("repetendo le volte") da parte di un giocatore sconfitto ("colui che perde") ad un gioco di dadi ("il gioco della zara"), diffusissimo (stando alle testimonianze del giurista Odofredo, morto nel 1265) non solo tra la plebe medioevale (tanto da arrivare ad essere vietato sulle strade e sulle piazze, in più occasioni, per esempio a Bologna, dove si

chiamava "ludus ad gnaffum" nel 1272), ma anche tra i giullari e gli uomini di corte, come testimonia, per es. Antonio da Ferrara (1315-1370 c.a.). In arabo, "dado" è "zahar" o "zahr" ed il gioco, che ha molte varianti, è presto spiegato in quella più diffusa in Italia: si gettano 3 dadi su una superficie piana (può essere un tavolo ma spesso veniva giocato per strada sul selciato). I due giocatori, nel breve intervallo di tempo che intercorre tra il lancio dei dadi ed il loro arresto, dicono ciascuno un valore: vince la posta chi azzecca il risultato. I valori possibili sono, ovviamente, quelli

che vanno da 3 a 18 compresi; ma, per regola, 3, 4, 17, 18 sono valori, per così dire, “neutri”, sui quali i giocatori non possono puntare (un po’ come zero alla roulette; qui, però, non c’è il “banco”). L’analisi del gioco è matematicamente assai banale: due numeri, 10 e 11, hanno probabilità maggiori di uscire di tutti gli altri e puntare sui valori-limite ammessi, cioè 5 e 16, dà poche occasioni di vittoria. Nella edizione critica ad uso scolastico [S] a pag. 58, emblematico è il fatto che, nella nota a piè pagina, nel tentativo di dar ragione all’accomunare i valori 3, 4, 17, 18 nell’esclusione, si trovi la seguente spiegazione: ciò è dovuto al fatto che la loro possibilità di uscita è unica. Ora, l’analisi è corretta nei casi 3 e 18 i quali hanno in effetti probabilità 1 su 216 di apparire; ma 4 e 17 hanno probabilità non uguale a quella, bensì addirittura tripla: 3 su 216. Né miglior sorte spetta alla appendice della voce “zara” dell’“Enciclopedia Dantesca”; ivi, a pag. 1166 si trova: “Erano considerati nulli (...) i numeri ottenibili con una sola combinazione tra i tre (...) dadi (ossia i due numeri più bassi e i due numeri più alti possibili: 3 e 4, 17 e 18 per il gioco con i tre dadi (...)). Se è vero che Dante rappresenta ancora oggi un esempio straordinario di unificazione delle snowiane “due culture”, è, ahimè, altrettanto vero che da molto tempo si è persa ogni speranza di proseguire su questa strada: la specializzazione culturale fa sì che anche il più grande competente della disciplina A rischi di essere del tutto ignorante nella B, con grande nocumento per entrambe.

Note.

[1] Molto si potrebbe qui dire sul significato che vari studiosi hanno voluto dare alle matematiche, anche se queste esulavano dal loro specifico campo d’interesse. Vorrei qui ricordare il pensiero di Agostino di Tagaste (354-430) per il quale l’aritmetica ha valore ascetico. (Si veda [Car], ad esempio).

[

Quanti sono gli angeli del cielo? Secondo Dante, un 10 seguito da 188 zeri, un numero enorme, impossibile da leggere, eppur preciso. Lo si ricava dai suoi versi del Paradiso, XXVIII 91 - 93: L’incendio suo seguiva ogni scintilla;/ ed eran tante, che ’l numer loro/ più che ’l doppiar delli scacchi s’inmilla. Il riferimento è a una famosa leggenda in cui si narra la storia dell’inventore degli scacchi, che chiese in regalo al suo sovrano, entusiasta del gioco, un chicco di riso sulla prima casella della sua scacchiera 8 per 8, il doppio sulla seconda, cioè 2, il doppio ancora sulla terza, cioè 4, e sempre raddoppiando, 8, 16, 32, 64 e così via sulle caselle successive, fino all’ultima, la sessantaquattresima. Il risultato è un numero impressionante, più di 18 miliardi di miliardi di chicchi, circa 3 chicchi e mezzo per ogni centimetro quadrato della superficie terrestre. E molto più grande sarebbe il numero degli angeli, perché dovremmo rifare lo stesso calcolo, non con le potenze del due, ma con le potenze del mille, per arrivare al numero che abbiamo indicato.

La Commedia è ricca di riferimenti matematici che confermano la profonda cultura scientifica di Dante, una cultura diffusa tra i letterati e le persone colte dell’epoca, certo più di quanto non lo sia oggi. E molti sono andati alla ricerca della matematica nascosta nei versi di Dante, arrivando persino a vedere, con un po’ di azzardo, nella struttura del Paradiso dantesco un’ipersfera, cioè una comune sfera elevata a una dimensione superiore.

Nella cartella di tutti gli studenti c’è la Commedia e il libro di geometria. Da una parte troviamo i teoremi in versi di Dante, ad esempio, Paradiso, XVII 13 - 15: O cara piota mia, che s’è t’insusi,/ che come veggion le terreni menti/ non capere in triangol due ottusi. Dall’altra l’enunciato dello stesso teorema, nelle parole di Euclide, Elementi, Libro I, teorema XVII: In ogni triangolo, la somma di due angoli qualsiasi è sempre minore di due angoli retti. Ma sono rari gli insegnanti disposti a cercare un collegamento tra il mondo della poesia e quello dei numeri, e non esiste purtroppo collaborazione tra chi insegna italiano e chi insegna matematica. Un’occasione unica per tentare questo avvicinamento tra due mondi ancora separati, almeno nella scuola, è proposta da Bruno D’Amore, docente di Didattica della Matematica all’università di Bologna. Negli originali racconti del suo nuovo libro Più che ’l doppiar de li scacchi s’immilla (titolo che riprende il verso che abbiamo citato) D’Amore toglie la corona d’alloro al poeta sommo presentandolo nella sua vita quotidiana, con un ritratto un po’ irriverente, giocato tra documentazione storica e immaginazione, innamorato del buon vino e della buona tavola, frequentatore assiduo di bettole di infimo ordine e di donne di facili costumi; ma soprattutto sempre curioso di sapere, alla ricerca delle novità

culturali del suo tempo, nel momento affascinante in cui la cultura araba arriva in occidente. E ritroviamo Dante alle prese con problemi di calcolo delle probabilità, in dispute sulla logica e sull'infinito, alla scoperta delle cifre arabe o, in giro per l'Italia, a confronto con amici e maestri, nella continua ricerca d'ispirazione per i suoi versi matematici.

"Tutto qui - mette le mani avanti D'Amore - è frutto d'invenzione, o quasi", e colloca in appendice, per maggior chiarezza, un'accurata analisi della matematica e della logica nascosta nei versi di Dante, e la presentazione dei matematici che Dante può aver letto o incontrato, dimostrando invece l'attenta documentazione alla base del suo racconto.

Il risultato è un libro colto e divertente, il libro che mancava nella cartella dello studente, fra Dante ed Euclide, proprio per tentare una riconciliazione fra numeri e poesia. Un libro da consigliare allo studente e agli insegnanti di italiano e di matematica nella speranza vana di una collaborazione, che solo un miracolo può avverare. Come dice D'Amore: "dio! Fa che lavorino insieme ogni tanto!" Un libro per le persone curiose, per chi si illude di aver capito la Commedia senza sapere nulla di matematica e naturalmente per chi conosce la matematica, ma ha leggiucchiato la Commedia, senza profitto, soltanto sui banchi di scuola. E Dante è sicuramente un'ottima guida, anche per l'alta considerazione in cui teneva la matematica che nel Convivio paragona al Sole: "Ché del suo lume tutte s'illuminano le scienze, però che li lor subietti sono tutti sotto alcun numero considerati - scrive Dante, con una affermazione di grande attualità nel nostro mondo digitale - e nelle considerazioni di quelli sempre con numero si procede".

Federico Peiretti

Bruno D'Amore, *Più che 'l doppiar de li scacchi s'inmilla*, Pitagora Editrice, 2001



Parlerò ora di un altro passo dantesco, nel quale io presumo di scorgere un'allusione alle radici stesse della matematica.

Non si è forse incontrato per la prima volta con la matematica ognuno di noi, quando da bambino ha imparato a contare? I numeri 1, 2, 3 ci sono tanto familiari, perché per mezzo loro siamo in grado di indicare quanti sono gli oggetti di un insieme qualsiasi: quello degli uccelli posati su un albero, o quello delle monete che ho nel borsellino, o quello delle molecole che contiene un grammo d'acqua, e via dicendo. Ma ciò che fa di essi un primo mattone per la costruzione di edifici, cioè intendo dire, di teorie matematiche aventi di volta in volta sempre maggiore complessità, è la nostra capacità di pensarli astrattamente e come costituenti un tutto, cioè come elementi di un insieme, che non è finito, perché non esiste un numero più grande di tutti gli altri.

Questo, che ugualmente viene detto «insieme dei numeri naturali», dovrà anch'esso potersi introdurre mediante una definizione assiomatica, nel senso detto poco fa. E solo alla fine del secolo scorso, tale definizione è stata precisamente formulata da Giuseppe Peano. Non sto qui a ricordarla per disteso, ma dirò soltanto che essa si basa sull'idea del passaggio da n a $n+1$, come dicono i matematici, cioè da un qualsiasi numero al suo successivo.

Ora Dante non poteva certo dire n e $n+1$; l'abitudine, che oggi ci è familiare, di adoperare delle lettere, per indicare ora un numero, ora un altro, che a ciascuna di esse si possa sostituire, è divenuta di uso comune solo molto più tardi, perfino i nostri famosi algebristi del '500, per esempio, non l'avevano ancora adottata.

Il poeta, allora per esprimere quello che oggi diremmo n e $n+1$, nomina il primo numero che gli viene in mente e il suo successivo. E' così che va interpretato, secondo me, «il cinque e il sei», che troviamo nella terzina del Paradiso a cui sto pensando in questo momento. Eccola. Sono parole che Cacciaguida rivolge a Dante (Par. XV, 35-37):

«Tu credi che a me tuo pensier mei
da quel ch'è primo, così come raia
dall'un, se si conosce, il cinque e il sei».

Questo generarsi dell'insieme di tutti i numeri naturali mediante il solo 1 viene ravvicinato da Dante alla conoscenza che un beato, come Cacciaguida, può formarsi di tutti i pensieri altrui mediante «quel ch'è primo», cioè il pensiero divino.

Vediamo così espresso qui con un'allusione alla matematica un motivo che ricorre spesso nel Paradiso il pensiero divino come (Par. XXVI, 106-108)

«... specchio,
che fa di se, pareglio all'altre cose
e nulla face lui, di se, pareglio»,

nel quale la mente dei beati può mettersi in contatto con la mente degli altri. Così, per esempio, a Carlo Martello dice il poeta (Par. VIII 85-90):

«Pero ch'io credo che l'alta letizia,
che'l tuo parlar m'infonde, signor mio,
la've ogni ben si termina e s'inizia
per te si veggia come la vegg'io,
grata m'e più, ed anco questo ho caro,
perché 'l discerni rimirando in Dio»,

e a Folchetto di Marsiglia (Par. IX, 73-74):

«Dio vede tutto, e tuo veder s'inluia,
beato spirito »,

dove, fra parentesi, possiamo ammirare il preziosismo del verbo inluiarsi, cioè immedesimarsi in lui, che non si scompagna dagli altri consimili, ciascuno usato una sola volta in tutto il poema, immiarsi, intuarsi (ibidem, 81), inleiarsi (Par. XXII, 127), cioè immedesimarsi in me, in te, in lei, indovarsi (Par. XXXIII, 138), cioè collocarsi, intrearsi (Par. XIII. 57), cioè entrare come terzo, insemprarsi (Par, X, 148), cioè eternarsi.

* * *

Ma torniamo ancora una volta alla matematica. Ho detto che l'insieme dei numeri naturali costituisce un primo mattone per la costruzione di ogni teoria matematica. E ho detto anche che esso non è un insieme finito: «i numeri non finiscono mai», è una scoperta che, a un certo momento, fa ogni bambino.

È questa l'intuizione dell'infinito matematico, che non va confuso con l'infinito leopardiano, cioè con quella immensità, davanti alla quale l'emozione poetica suscita un senso di vago sgomento o di smarrimento soave.

E non va confuso neppure con quell'infinito, sul quale possono disputare astronomi e cosmologi, legato all'idea della natura fisica del nostro universo.

L'infinito della matematica, a prescindere dall'uso che di questa parola fanno i matematici anche in tutt'altro senso, nel parlare di «tendenza a un limite», è qui inteso da me come «numerosità infinita di un insieme», cioè impossibilità, per certi insiemi, di contare quanti sono gli oggetti che li formano.

Il primo, che s'incontra, di questi insiemi è quello dei numeri naturali. Esso serve da punto di partenza per ottenerne poi tanti altri, come, citando a caso fra quelli più familiari a chi studia matematica, gl'insiemi dei numeri razionali, reali, complessi, gli spazi lineari, metrici, topologici e così via: e notiamo al passaggio come, a conferma della ricordata definizione di Poincaré, i matematici adoperino sempre una stessa parola, per esempio «numero» o «spazio», per indicare tante cose diverse una dall'altra, da definirsi di volta in volta.

Questa idea di infinito è l'essenza di cui è impregnata tutta la matematica, la quale da essa attinge quel carattere che la distingue dalle scienze della natura. Quello che si osserva in natura ha sempre l'impronta del finito. Non deve ingannare il fatto che non sappiamo contare le stelle in cielo e i granelli di sabbia in riva al mare. Il numero di osservazioni che possiamo registrare, anche se i moderni elaboratori lo hanno fantasticamente amplificato, è sempre finito, il numero delle volte che possiamo ripetere un esperimento, per provare una legge della fisica è sempre finito, la quantità delle cifre decimali nel numero, che otteniamo misurando, per esempio, una lunghezza, è sempre finita.